代数解析におけるエネルギー法 (微分方程式の超局所解析)

数理解析研究所講究録
431巻 1981年 207-235

代数解析におけるエネルギー法

東大 理　片岡清臣

佐藤の超函数は一般な解析関数のコホモロジー的境界値として定義されている。その為ディストリビューションに対する不等式的方法のようなものは本来不可能であるとして省みられなかった。しかし最近のJ.Sjöstrand氏の一連の研究の結果，関数の超局所解析性は，その関数のある種のパラメータ付の"曲がったフーリエ変換"の値の評価と同等である事がわかった。もっともHörmander 又はIagolnitzerのanalytic wave front setの定義においても同様の原理が使われていたのであるが，Sjöstrandの方法はあるパラメータを導入した事により，応用上はるかにすぐれている。彼はディストリビューションのみに限定しているが，コンパクト台の佐藤超函数を定義の所で用いれば，佐藤超函数に対しても有効な論法である事がわかる。この方法は特にマイクロ双曲型境界値問題の解の解析性の境界に沿っての伝播についての結果

などエネルギー法的色彩の強い問題に対して特に有効である。(多分，不可欠)。しかし彼の方法は議論をすべて一種の局所的な Fourier space の上で行なうので複素解析的方法とのつながりはほとんどなくなる。このため幾何学的な直観の入り込む余地は少なく，又，境界値問題の基本解の構成などには今の所有効であるとはいえない。これらの点を考慮した上で最近筆者により，代数解析的方法の枠内でも L^2-理論的不等式法(すなわちエネルギー法)が定式化できる事が明らかになった。ここではその基本的部分を簡単に解説したい。

不等式法の基本原理というのはいうまでもなく $\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^p dx = 0$ $(p\geq 1)$ から $u(x)\equiv 0$ が従う事である。特に $p=2$ の時を考えるとテンソル積 $u(x)\overline{u}(y)$ の対角線 $\{x=y\}$ 上での値の評価が問題となる。ところが佐藤の超函数論において $u(x)\overline{u}(y)$ が $\{x=y\}$ 上に制限できるのは $u(x)$ が実解析的な場合に限られる。これでは役に立たないから，かわりにテンソル積 $u(x)\overline{u}(y)$ のままで扱うことにする。すなわち $|u(x)|^2$ の代わりに $u(x)\overline{u}(y)$ という2倍の変数の超函数を考えることになる。今 $iT^*\mathbb{R}^n$ の一点 $(x_0;i\xi_0 dx)$ を固定する。その時

$$u(x) = F(x+i0\Gamma) + V(x)$$

と書ける，但し，$\Gamma = \{y\in\mathbb{R}^n ; \langle y,\xi_0\rangle > \varepsilon\sqrt{|y|^2-\langle y,\xi_0\rangle^2}\}$ なる錐，

$F(z)$ は $\{z\in\mathbb{C}^n;\ |z-x_0|<\varepsilon,\ \mathrm{Im}\,z\in\Gamma\}$ で正則な関数，又 $V(x)$ は $(x_0;i\xi_0dx)$ でマイクロ解析的な超函数である。よって

$$u(x)\overline{u(y)}=F(x+i0\Gamma)\cdot\overline{F(\overline{y-i0\Gamma})}+F(x+i0\Gamma)\cdot\overline{V(y)}$$
$$+V(x)\overline{F(\overline{y-i0\Gamma})}+V(x)\overline{V(y)}$$

となる。但し $\overline{F(\bar{z})}$ は $\{-\mathrm{Im}\,z\in\Gamma\}$ で定義された正則関数になる事に注意されたい。さらに $u(x)\overline{u(y)}$ を反対角集合

$$\Delta^a=\{(x,y;i\xi dx+i\eta dy)\mid x=y,\ \xi+\eta=0\}$$

上の一点 $(x_0,x_0;i\xi_0(dx-dy))$ でマイクロ関数としてみた場合中2項以下は0となることに注意すると，

$$u(x)\overline{u(y)}\equiv F(x+i0\Gamma)\overline{F(\overline{y-i0\Gamma})}$$

となる．従ってこの様な二次形式型の超函数はマイクロ関数として反対角集合 Δ^a 上でみた場合，$F(z)\overline{F(\bar{z})}$ の様に非常に特徴的な性質を持った解析関数の境界値で表わされる事がわかる．そこでこの様な性質を持った解析関数を一般に考える事にする。

<u>定義</u> Ω を $\mathbb{C}^n$ の領域とする。$\Omega\times\Omega$ 上の複素数値関数 $K(z,w)$ が整型エルミートであるとは，

(i) $K(z,w)$ は $(z,\bar{w})$ について $\Omega\times\Omega^c$ で正則（但し Ω^c は Ω の複素共役集合）。

(ii) $K(z,w)$ はエルミート核，すなわち $\overline{K(z,w)}=K(w,z)$。

簡単の為 $\Omega\times\Omega$ 上の整型エルミート核全体を $\mathcal{H}(\Omega)$ と書く事にする。$\mathcal{H}(\Omega)$ の2元の単なる関数としての積は再び $\mathcal{H}(\Omega)$ に属す（オペレータ結合ではない）。従って $\mathcal{H}(\Omega)$ は $\mathbb{R}$ 上の Fréchet 代数をなす。ところで $F_j(z)$ $(j=1\ldots N)$ を Ω 上の正則関数とすると $\sum_{j=1}^{N} F_j(z)\overline{F_j(w)}$ は $\mathcal{H}(\Omega)$ に属すが単にそれだけではなく，一種の正値性をもっている。そこでこの正値性をもとにして $\mathcal{H}(\Omega)$ に順序 $\geqq$ を入れる事ができる。

定義　$\mathcal{H}(\Omega)$ の元 $K(z,w)$ が正又は0であるとは（$K\geqq 0$ と書く），$\forall N$, $\forall z_1,\ldots,\forall z_N\in\Omega$ に対してエルミート行列 $(K(z_j,z_k))_{j,k=1\ldots N}$ が半正定値の時とする。そして $K_1, K_2\in\mathcal{H}(\Omega)$ が $K_1\geqq K_2$ である事を $K_1-K_2\geqq 0$ と定義する。明らかに $\geqq$ は $\mathcal{H}(\Omega)$ 上の順序となる。$\mathcal{H}^+(\Omega)=\{K\in\mathcal{H}(\Omega);\ K\geqq 0\}$ とおく。

命題1　$\mathcal{H}^+(\Omega)$ は和，積について閉じている。

$\because$) 和についてはよい。積について半正定値性を確かめるのは簡単な線型代数の問題なので省略する。

例　Ω で正則な関数達 $F_j(z)$ をとってきて有限和（又は適当な無限和）$\sum_j F_j(z)\overline{F_j(w)}$ を作れば明らかに $\mathcal{H}^+(\Omega)$ の元になる。又，和を一般化して正値測度による積分にしてもよい事は明らかである。例えば $\Omega=\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ とすると $\alpha>-1$, $z,w\in\Omega$ のとき，

$$\left(\frac{i}{z-\bar{w}}\right)^{\alpha+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty e^{itz}\,\overline{e^{itw}}\; t^\alpha\, dt$$

であるから $\left(\frac{i}{z-\bar{w}}\right)^\beta \in \mathcal{H}^+(\Omega)$ $(\forall \beta \geqq 0)$.

命題2 $\mathcal{H}^+(\Omega)$ の元 $K(z,w)$ に対して次の不等式が成立する。

(i) $K(z,z) \geqq 0$ $\forall z \in \Omega$。

(ii) (Cauchy-Schwarz) : $|K(z,w)|^2 \leqq K(z,z)\cdot K(w,w)$ $\forall z, w \in \Omega$.

∵) 2次のエルミート行列 $(K(z_j, z_k))_{j,k=1,2}$ の半正定値性から直ちに得られる。

整型エルミート核 $K(z,w)$ は Ω で定義された関数に働く積分作用素の核とも考えられるがその事を述べる前に正則関数の作るヒルベルト空間と再生核である Bergman 核関数を定義しておく。

定義 $\mathbb{C}^n$ の領域 Ω に対して $L^2\mathcal{O}(\Omega) \equiv L^2(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega)$ を Ω で正則かつルベッグ測度 $dz d\bar{z}$ について2乗可積分な関数全体の作るヒルベルト空間とする。但し内積 (f, g) を

$$\int_\Omega f(z)\,\overline{g(z)}\, dz d\bar{z}$$

で定義する。この時 Ω に対する Bergman 核関数 $B_\Omega(z,w)$ を

$$B_\Omega(z,w) = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(z)\,\overline{\varphi_j(w)}$$

によって定義する([/])。但し $\{\varphi_j(z)\}_{j=1,2,\ldots}$ は $L^2\mathcal{O}(\Omega)$ の完全正規直交基底である。よく知られている様にこの級数は $\Omega \times$

Ω上広義一様に絶対収束して$\Omega\times\Omega$上の整型エルミート核になる。また$\{\varphi_j(z)\}_{j=1,2\ldots}$のとり方によらずに決まり，$L^2\mathcal{O}(\Omega)$に作用する積分作用素として恒等作用素になる。すなわち$\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi_j(w)|^2=B_\Omega(w,w)<+\infty$であるから$\forall w\in\Omega$に対して$B_\Omega(*,w)\in L^2\mathcal{O}(\Omega)$であって，$\forall f(z)\in L^2\mathcal{O}(\Omega)$に対して$(f(*),B_\Omega(*,w))=\sum_j\varphi_j(w)(f(*),\varphi_j(*))=f(w)$，すなわち

$$f(w)=\int_\Omega f(z)\overline{B_\Omega(z,w)}\,dz\,d\bar z=\int_\Omega B_\Omega(w,z)f(z)\,dz\,d\bar z。$$

また和の表示式から直ちに$B_\Omega(z,w)\in\mathcal{H}^+(\Omega)$がわかる。例としては多重円板$\{z\in\mathbb{C}^n;|z_1|<1,\ldots,|z_n|<1\}$のとき$B_\Omega(z,w)=\frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n}(1-z_j\bar w_j)^{-2}$，超球$\{z\in\mathbb{C}^n;|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<1\}$のとき$B_\Omega=\frac{n!}{\pi^n}(1-\langle z,\bar w\rangle)^{-n-1}$，$\Omega=\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Im}z>0\}$の時$B_\Omega=-\frac{1}{\pi}(z-\bar w)^{-2}$などである。$\Omega$と$\Omega'$が双正則写像$z'=T(z):\Omega\xrightarrow{\sim}\Omega'$で結ばれている時は公式：

$$B_\Omega(z,w)=B_{\Omega'}(T(z),T(w))\cdot\det\left(\frac{\partial T(z)}{\partial z}\right)\cdot\overline{\det\left(\frac{\partial T(w)}{\partial w}\right)}$$

が成立する事はよく知られている。

<u>命題3</u>　(i)　$K(z,w)\in\mathcal{H}(\Omega)$に対して$K\geq0$と次は同値：

$\forall\varphi(z)\in C_0(\Omega)$，$\int_{\Omega\times\Omega}\varphi(z)\overline{\varphi(w)}K(z,w)\,dz\,d\bar z\,dw\,d\bar w\geq0$。

(ii)　$K(z,w)\in\mathcal{H}(\Omega)\cap L^2(\Omega\times\Omega)$に対して次の展開（ヒルベルト－シュミット展開）が成立する。

$$K(z,w)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(w)}$$

ここで $\{\varphi_j(z)\}_{j=1,2,\dots}$ は $L^2\mathcal{O}(\Omega)$ のある完全正規直交基底，$\lambda_j\in\mathbb{R}$，$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2<+\infty$。さらに和は $L^2(\Omega\times\Omega)$ で収束し，かつ $\Omega\times\Omega$ 上広義一様に絶対収束する，この時 $K\geqq 0$（すなわち $K\in\mathcal{H}^+(\Omega)$）と，$\forall j,\ \lambda_j\geqq 0$ とは同値．又，一般の K に対して次の不等式が成立する。

$$-C_-\cdot B_\Omega \leqq K \leqq C_+\cdot B_\Omega$$

但し，$C_\pm=\sup\{\pm\lambda_j;\ \pm\lambda_j\geqq 0\}$（$\phi$ の時は 0 とおく）。

∵) (i) ⇒ 上の積分は Riemann 式和の極限で書けるから有限個の点での値からなるエルミート行列 $(K(z_j,z_k))_{j,k}$ の半正定値性から直ちに得られる。⇐ は超函数 $\varphi(z)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\delta(z-z_j)$ を $C_0(\Omega)$ の元で近似して極限移行すれば $\sum_{j,k=1}^{N}K(z_j,z_k)\lambda_j\overline{\lambda_k}\geqq 0$ を得る。

(ii) $K(z,w)$ を核とする $L^2\mathcal{O}(\Omega)$ に働く積分作用素はエルミート，かつ L^2 核をもつから Hilbert–Schmidt の展開定理が使えて上の展開を得る。和は $L^2(\Omega\times\Omega)$ で収束するがさらに Bergman 核の定義の所で述べた様に $\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi_j(z)||\varphi_j(w)|$ は $\Omega\times\Omega$ 上広義一様に収束するから特に上の和も広義一様に絶対収束する。その他の主張はほぼ明らか。

命題4 (i) 列 $\{K_j\}_{j=1,2,\dots}\subset\mathcal{H}(\Omega)$ が $\Omega\times\Omega$ で広義一様収束する事と次は同値：$\forall\Omega'\Subset\Omega$，$\forall\varphi(z)\in L^2\mathcal{O}(\Omega')$ に対して数列 $\{\int_{\Omega'\times\Omega'}K_j(z,w)\overline{\varphi(z)}\varphi(w)\,dz\,d\bar{z}\,dw\,d\bar{w}\}_j$ が収束する事．

(ii)（順序完備性）$\mathcal{H}(\Omega)$ 内の単調増大列 $K_1\leqq K_2\leqq\cdots\leqq K_j\leqq$

が上界 $K\in\mathcal{H}(\Omega)$ （i.e. $\forall j,\ K_j\leqq K$ なる $\mathcal{H}(\Omega)$ の元）を持つならば $\lim_{j\to\infty}K_j(z,w)=K_\infty(z,w)$ （$\Omega\times\Omega$ で広義一様）が存在して，K_∞ は $\mathcal{H}(\Omega)$ の順序の意味で $\{K_j\}_{j=1,2,\cdots}$ の上限になる。

（単調減小列についても同様）。

$\because$）(i) $\Leftarrow$ を云えばよい。$\Omega'\subset\subset\Omega$ を固定する。$\forall\varphi,\psi\in L^2\mathcal{O}(\Omega')$ に対して $I_j(\varphi,\psi)=\int_{\Omega'\times\Omega'}\overline{\varphi(z)}\psi(w)K_j(z,w)|dz|^2|dw|^2$ とおく。

条件により $\forall\varphi\in L^2\mathcal{O}(\Omega')$ に対して数列 $\{I_j(\varphi,\varphi)\}_j$ は収束する。ところが $\mathrm{Re}\,I_j(\varphi,\psi)=\frac{1}{4}(I_j(\varphi+\psi,\varphi+\psi)-I_j(\varphi-\psi,\varphi-\psi))$ であるから $\{\mathrm{Re}\,I_j(\varphi,\psi)\}_j$ も収束する。虚部も同様の理由で収束するから結局 $\{I_j(\varphi,\psi)\}_j$ が収束する事がわかる。特に $\varphi=B_{\Omega'}(z,w_1)$, $\psi=B_{\Omega'}(z,w_2)$ $(w_1,w_2\in\Omega')$ とおくと，$I_j(\varphi,\psi)=K_j(w_1,w_2)$ となるから $\{K_j\}_j$ は $\Omega'\times\Omega'$ 上各点収束する。一方 $\{|I_j(\varphi,\psi)|\}_j$ は φ,ψ を固定すれば有界であって I_j は $L^2\mathcal{O}(\Omega')\oplus L^2\mathcal{O}(\Omega')$ 上の連続関数であるから Baire の定理が使えて，結局 $\exists C>0$ （j によらない）に対して，次の不等式が成立する。$\forall\varphi,\forall\psi\in L^2\mathcal{O}(\Omega')$,

$$|I_j(\varphi,\psi)|\leqq C\|\varphi\|_{L^2\mathcal{O}(\Omega')}\cdot\|\psi\|_{L^2\mathcal{O}(\Omega')}$$

特に φ,ψ を上の様にとれば $|K_j(w_1,w_2)|\leqq C\|B_{\Omega'}(*,w_1)\|\cdot\|B_{\Omega'}(*,w_2)\|$ $=C(B_{\Omega'}(w_1,w_1)\cdot B_{\Omega'}(w_2,w_2))^{1/2}$ $\forall j$ となる。従って Montel の定理により $\{K_j\}_j$ は $\Omega'\times\Omega'$ 上広義一様収束する。

(ii) 順序は小さな領域に制限しても保たれるから $\forall\Omega'\subset\subset\Omega$ において $\{K_j|_{\Omega'\times\Omega'}\}$ は単調増大，かつ上界をもつ。従って

(i) を使えば $K_{j_\nu j_\nu}$ が $\Omega'\times\Omega'$ 上広義一様収束する事がわかる。その他の主張は自明。

$\phi \neq \Omega' \subset \Omega$ を $\mathbb{C}^n$ の（連結）領域の対とすると $\mathcal{H}(\Omega)$ は $\mathcal{H}(\Omega')$ の中に制限として埋め込まれる。その時順序も保たれるから $\mathcal{H}^+(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{H}^+(\Omega')$ となる。ところが順序については この逆の事が起こる。つまり $\mathcal{H}^+(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{H}^+(\Omega')$，わかり易くいえば不等号 $\geq$ が広い領域まで解析接続されるという事である。

<u>補題5</u>（S. Bergman 2重直交基 [1]）。Ω', Ω を $\mathbb{C}^n$ の領域で，$\Omega' \Subset \Omega$ とする。その時 $\exists \{\varphi_\nu(z)\}_{\nu=1,2,\ldots}$: $L^2\mathcal{O}(\Omega)$ の完全正規直交基底 s.t. $\{\varphi_\nu(z)|_{\Omega'}\}_{\nu=1,2,\ldots}$ は $L^2\mathcal{O}(\Omega')$ においても互いに直交する。i.e. $\int_{\Omega'} \varphi_\mu(z)\overline{\varphi_\nu(z)}\,dz d\bar{z} = 0 \quad {}^\forall \mu \neq \nu$.

∵ Hilbert 空間 $L^2\mathcal{O}(\Omega)$, $L^2\mathcal{O}(\Omega')$ の内積をそれぞれ $(\ ,\ )$, $(\ ,\ )'$ とする。この時 $(\ ,\ )'$ は $L^2\mathcal{O}(\Omega)$ 上の連続双一次形式と考える事ができるから，リースの表現定理によって，$\exists S : L^2\mathcal{O}(\Omega) \to L^2\mathcal{O}(\Omega)$（連続線形作用素）s.t. $(f, g)' = (Sf, g)$. ${}^\forall f, g \in L^2\mathcal{O}(\Omega)$ と書ける。すぐわかる様に S は自己共役作用素である。又，Ω' が Ω 内で相対コンパクトである事を使うと，S はコンパクト作用素になる事がわかる。従ってコンパクト自己共役作用素に対するスペクトル分解定理によって上の主張が得られる。

<u>注意</u>　2重直交基の代表例としては同心超球の対に対して単項式全体 $\{z_1^{j_1}\cdots z_n^{j_n}\}_{j_1\geq 0,\ldots,j_n\geq 0}$ がとれる。

定理6 $\phi \neq \Omega' \subset \Omega$ を $\mathbb{C}^n$ の(連結)領域の対とする。
(i) $K \in \mathcal{H}(\Omega)$ に対して $K \in \mathcal{H}^+(\Omega)$ と $K \in \mathcal{H}^+(\Omega')$ とは同値。
(ii) $K_1, K_3 \in \mathcal{H}(\Omega)$, $K_2 \in \mathcal{H}(\Omega')$ が $\mathcal{H}(\Omega')$ での不等式 $K_1 \leqq K_2 \leqq K_3$ を満たすならば、実は $K_2 \in \mathcal{H}(\Omega)$ と解析接続され、さらに $\mathcal{H}(\Omega)$ での不等式 $K_1 \leqq K_2 \leqq K_3$ が成立する。

証) (i) $K \in \mathcal{H}(\Omega)$ を固定。Ω を少し縮めたものに対して主張を云えば十分だから最初から $K(z,w) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ としてもよい。又、$\phi \neq \Omega' \Subset \Omega$ としてもよいから補題5が使えて、$L^2\mathcal{O}(\Omega)$ の完全正規直交基 $\{\varphi_\mu(z)\}_{\mu=1,2,\dots}$ であって $L^2\mathcal{O}(\Omega')$ でも互いに直交するものがとれる。この時 $K(z,w)$ は $L^2(\Omega \times \Omega)$ で次の様に展開できる。

$$K(z,w) = \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} k_{\mu\nu}\, \varphi_\mu(z) \overline{\varphi_\nu(w)}$$

但し $\overline{k_{\mu\nu}} = k_{\nu\mu}$ $\forall \mu,\nu$, かつ $\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} |k_{\mu\nu}|^2 < +\infty$. その時命題3により $K \in \mathcal{H}^+(\Omega)$ は次と同値: $\forall \psi(z) \in L^2\mathcal{O}(\Omega)$, $\int_{\Omega\times\Omega} \overline{\psi(z)}\psi(w) K(z,w) \times |dz|^2 |dw|^2 \geqq 0$ 言い換えると $\forall (c_\mu)_\mu \in \ell^2$, $\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} \overline{c_\mu} c_\nu k_{\mu\nu} \geqq 0$。さらにこれは「$\forall N \geqq 1$, エルミート行列 $(k_{\mu,\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,N}$ が半正定値」と同値である。一方 $K(z,w)|_{\Omega'\times\Omega'} \in \mathcal{H}^+(\Omega')$ を $(k_{\mu,\nu})_{\mu\nu}$ の言葉で表わす事を考える。$L^2\mathcal{O}(\Omega') = \langle \varphi_1|_{\Omega'}, \dots, \varphi_\mu|_{\Omega'}, \dots \rangle \oplus E$ (E は直交補空間)であるから $\{\varphi_\mu|_{\Omega'}\}_\mu$ の直交性を用いると $K|_{\Omega'\times\Omega'} \in \mathcal{H}^+(\Omega')$ は次と同値: $\sum_\mu |c_\mu|^2 \cdot \|\varphi_\mu|_{\Omega'}\|^2 < +\infty$ なる任意の数列 $(c_\mu)_\mu$ に対して $\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} \overline{c_\mu} c_\nu k_{\mu\nu} \|\varphi_\mu|_{\Omega'}\|^2 \cdot \|\varphi_\nu|_{\Omega'}\|^2 \geqq 0$。特にこれから、($\|\varphi_\mu|_{\Omega'}\| > 0$ $\forall \mu$ を考慮して) $\forall N \geqq 1$, $(k_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,N}$ の半正定

値性が得られる。(ii) 最後の不等式は(i)から得られるから K_2 が $\Omega\times\Omega$ に接続できる事を云えばよい。$K_1=0$ としてもよい。また(i)と同様の議論により $\phi \neq \Omega' \Subset \Omega$, かつ $K_2(z,w)\in L^2(\Omega'\times\Omega')$, $K_3(z,w)\in L^2(\Omega\times\Omega)$ としてよい。ところがその時は命題3 (ii)により K_3 は $\mathcal{H}(\Omega)$ の元として B_Ω の正定数倍で上から評価できる。従って結局 $\mathcal{H}(\Omega')$ において不等式 $0\leqq K_2\leqq B_\Omega|_{\Omega'\times\Omega'}$ が成り立つとしてよい。$K_2\in L^2(\Omega'\times\Omega')$ だから次の様に命題3の意味での Hilbert-Schmidt 展開：

$$K_2(z,w)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j f_j(z)\overline{f_j(w)} \quad (\text{無限和 又は有限和})$$

が得られる。($\lambda_j>0$ としてよい。) 従って特に $\forall j$ に対して

$$\frac{1}{\lambda_j}B_\Omega(z,w)-f_j(z)\overline{f_j(w)}\in\mathcal{H}^+(\Omega')。$$

ここで(i)と同様に $L^2\mathcal{O}(\Omega)$ の完全正規直交基 $\{\varphi_\mu(z)\}_{\mu=1,2,\dots}$ で $L^2\mathcal{O}(\Omega')$ でも直交基となるものをとる。従って $B_\Omega(z,w)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\varphi_\mu(z)\overline{\varphi_\mu(w)}$, $f_j(z)=\sum_{\mu=1}^{\infty}c^j_\mu\,\varphi_\mu(z)|_{\Omega'}/\|\varphi_\mu|_{\Omega'}\|+g_j(z)$ と書ける。但し $(c^j_\mu)_\mu\in\ell^2$, $g_j(z)\in\langle\varphi_1|_{\Omega'},\dots,\varphi_\mu|_{\Omega'},\dots\rangle^{\perp}$ ($L^2\mathcal{O}(\Omega')$ での直交補空間)。これを $\int_{\Omega'\times\Omega'}\overline{g_j(z)}\,g_j(w)\left(\frac{1}{\lambda_j}B_\Omega(z,w)-f_j(z)\overline{f_j(w)}\right)|dz|^2\cdot|dw|^2\geqq 0$ に代入すると直ちに $g_j\equiv 0$ がわかる。さらに $\forall(t_\mu)_\mu\in\ell^2$ に対して $\Phi(z)=\sum_{\mu=1}^{\infty}t_\mu\varphi_\mu(z)|_{\Omega'}/\|\varphi_\mu|_{\Omega'}\|$ とおいて,不等式

$$\int_{\Omega'\times\Omega'}\overline{\Phi(z)}\,\Phi(w)\left(\frac{1}{\lambda_j}B_\Omega(z,w)-f_j(z)\overline{f_j(w)}\right)|dz|^2|dw|^2\geqq 0$$

を書き直すと

$$\frac{1}{\lambda_j}\sum_{\mu=1}^{\infty}|t_\mu|^2\,\|\varphi_\mu|_{\Omega'}\|^2-\left|\sum_{\mu=1}^{\infty}c^j_\mu t_\mu\right|^2\geqq 0$$

が得られる。ところが最後の不等式が $\forall (t_\mu)_\mu \in l^2$ に対して成り立つ事は、$\sum_{\mu=1}^{\infty} |C_\mu^j|^2 \cdot \|\varphi_\mu|_{\Omega'}\|^{-2} \leqq \lambda_j^{-1}$ と同じであるから、結局 $\sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu^j \cdot \varphi_\mu(z)/\|\varphi_\mu|_{\Omega'}\|$ は $L^2\mathcal{O}(\Omega)$ でも収束する。故に $f_j(z) \in L^2\mathcal{O}(\Omega)$ と接続される。今 $\forall N \geqq 1$ に対して $K_2^N(z,w) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f_j(z)\overline{f_j(w)}$ とおくと $K_2^N \in \mathcal{H}^+(\Omega)$ であり、さらに $\{K_2^N\}_{N=1,2,\ldots}$ は単調増大かつ上界 B_Ω を持つ。($\because$ B_Ω は $\{K_2^N\}_N$ の $\mathcal{H}(\Omega')$ での上界だから) よって命題4 (ii) により $\{K_2^N(z,w)\}_N$ は $\Omega \times \Omega$ 上広義一様収束する。この極限は明らかに K_2 の $\Omega \times \Omega$ への接続である。

<u>定理7</u> (ベルグマン核の大小 [1])。$\phi \neq \Omega' \subset \Omega$ を $\mathbb{C}^n$ の領域の対とする。この時 $\mathcal{H}(\Omega')$ における不等式 $B_\Omega|_{\Omega' \times \Omega'} \leqq B_{\Omega'}$ が成立する。

$\because$ 命題3 (i) により上は $\forall \varphi(z) \in L^2\mathcal{O}(\Omega')$,

$$\|\varphi\|^2_{L^2\mathcal{O}(\Omega')} \geqq \int_{\Omega' \times \Omega'} \overline{\varphi(z)}\varphi(w) B_\Omega(z,w) |dz|^2 \cdot |dw|^2$$

と同値。ところが $L^2(\Omega') = L^2\mathcal{O}(\Omega') \oplus L^2\mathcal{O}(\Omega')^\perp$ であって $B_\Omega(z,\bar{z}')$ は正則であるから、結局 $\forall \varphi \in L^2(\Omega')$

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega')} \geqq \int_{\Omega' \times \Omega'} \overline{\varphi(z)}\varphi(w) B_\Omega(z,w) |dz|^2 \cdot |dw|^2 \quad \text{---} (1)$$

と同値。一方 B_Ω は Ω に対する Bergman 核だから $\forall \varphi \in L^2(\Omega) = L^2\mathcal{O}(\Omega) \oplus L^2\mathcal{O}(\Omega)^\perp$ に対して

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \geqq \int_{\Omega \times \Omega} \overline{\varphi(z)}\varphi(w) B_\Omega(z,w) |dz|^2 \cdot |dw|^2 \quad \text{-----} (2)$$

が成立する。$L^2(\Omega')$ の元は 0 で拡張する事により $L^2(\Omega)$ の元とみなせるから結局 (2) から (1) が従う。

命題8　Uを$\mathbb{R}^n$の領域とし，$\mathcal{H}(U)=\varinjlim_{\Omega\supset U}\mathcal{H}(\Omega)$とおく．但し$\Omega$は$U$の$\mathbb{C}^n$での複素近傍全体を動く．すなわち$\mathcal{H}(U)$の元$K(x,u)$とは$U\times U$上での実解析的エルミート核である．この時$K(x,u)\in\varinjlim_{\Omega\supset U}\mathcal{H}^+(\Omega)$，すなわち$U$のある複素近傍において半正定値であることと$\forall N$, $\forall x_j\in U$ $(j=1,\dots,N)$に対してエルミート行列$(K(x_j,x_k))_{j,k=1,\dots,N}$が半正定値である事とは同値である。すなわち半正定値性は実軸上の値のみによって決まる．

∵）$U\ni 0$として0の近傍で示せばよい。ところが$K(z,w)$が0の複素近傍で半正定値である事と0でのTaylor係数

$$(D_x^J D_u^{J'} K(0,0))_{J,J'}$$

の任意の有限階近の係数からなるエルミート行列

$$(D_x^J D_u^{J'} K(0,0))_{|J|\le N,\ |J'|\le N}$$

が半正定値である事は同値（cf. 補題5の注）。この事から容易に証明できるが詳しくは略。

命題9　$\Omega\subset\mathbb{C}^n$を（連結）領域，$K(z,w)\in\mathcal{H}^+(\Omega)$とする。その時$\exists f_j(z)\in\mathcal{O}(\Omega)$ $j=1,2,\dots$ s.t.

$$K(z,w)=\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)\overline{f_j(w)}$$

と書ける。但し和は$\Omega\times\Omega$上広義一様に絶対収束する。

∵）$\phi\neq\Omega'\subset\subset\Omega$なる領域$\Omega'$をとる．明らかに$K(z,w)\in L^2(\Omega'\times\Omega')$．従って命題3(ii)より

$$K(z,w)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(w)}$$

と$\Omega'\times\Omega'$上で展開される。ここで$\lambda_j>0$, $\varphi_j\in L^2\mathcal{O}(\Omega')$, 和は$\Omega'\times\Omega'$上広義一様に収束する。一方$\forall j$; $\frac{1}{\lambda_j}K(z,w)-\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(w)}\in\mathcal{H}^+(\Omega')$, $\frac{1}{\lambda_j}K\in\mathcal{H}^+(\Omega)$であるから定理6 (ii)により$\varphi_j(z)\in\mathcal{O}(\Omega)$となる。よって$f_j(z)=\sqrt{\lambda_j}\,\varphi_j(z)$とおくと$\forall N\geq 1$; $K(z,w)-\sum_{j=1}^{N}f_j(z)\overline{f_j(w)}\in\mathcal{H}^+(\Omega)$. 従って命題4 (ii)により$\sum_{j=1}^{N}f_j(z)\overline{f_j(w)}$は$\Omega\times\Omega$上広義一様に$K(z,w)$に収束する。特に$\sum_{j=1}^{\infty}|f_j(z)|^2$は$\Omega$上一様に収束し，不等式

$$\left(\sum_{j=N}^{N+M}|f_j(z)\overline{f_j(w)}|\right)^2\leq\left(\sum_{j=N}^{N+M}|f_j(z)|^2\right)\cdot\left(\sum_{j=N}^{N+M}|f_j(w)|^2\right)$$

が成り立つから結局$\sum_{j=1}^{\infty}f_j(z)\overline{f_j(w)}$は$\Omega\times\Omega$上広義一様に絶対収束する。

$\Omega'\subset\subset\Omega\subset\mathbb{C}^n$を領域対とし，$F_j(z)\in\mathcal{O}(\Omega')$ $j=1,2,\ldots,N$とする。その時$E(z,w)=\sum_{j=1}^{N}F_j(z)\overline{F_j(w)}$が$\Omega\times\Omega$に解析接続できるとすると定理6によって各$F_j$が$\Omega$に解析接続できる事になる。この様にして定理6は非常な応用価値を持つ事がわかる。さらに有限和の所を正値測度による積分へと一般化できる。

<u>定理10</u>　$(X,\mathcal{B},\mu)$を正値測度空間とする。今$K(\lambda;z,w)$を$\lambda\in X$をパラメータに持つ（連結）領域$\Omega'\subset\mathbb{C}^n$における半正定値整型エルミート核とする。すなわち，

(イ)　$K(\lambda;z,w)$は$X\times\Omega'\times\Omega'$上の可測関数で$\lambda$を止めた時$\mathcal{H}^+(\Omega')$の元を表わす。

(ロ)　可積分，すなわち$\forall K\subset\Omega'$（コンパクト）に対し

$$\int_{X\times K\times K} |K(\lambda;z,w)|\cdot|dz|^2\cdot|dw|^2 d\mu(\lambda) < +\infty 。$$

この時 $S(z,w)=\int_X K(\lambda;z,w)\,d\mu(\lambda)$ は $\mathcal{H}^+(\Omega')$ の元となるが、もし $S(z,w)$ が ∃(連結)領域 $\Omega(\supset\Omega')$ に対し、$\Omega\times\Omega$ 迄解析接続されるならば ∃$\tilde{K}(\lambda;z,w)$: $\lambda\in X$ をパラメータにもつ $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ における半正定値整型エルミート核((イ)・(ロ)の意味で)、s.t.

$$\tilde{K}(\lambda;z,w)=K(\lambda;z,w) \quad \forall\lambda\in X\setminus L,\ \forall z,w\in\Omega'.$$

但し $L\subset X$ は z,w によらない零集合。

ツ) $\forall E\in\mathcal{B}$ (ボレル集合) に対して $S_E(z,w)=\int_E K(\lambda;z,w)\,d\mu(\lambda)$ を考えると確かにこれは $\mathcal{H}^+(\Omega')$ の元を表わす。$S(z,w)=S_E(z,w)+S_{X\setminus E}(z,w)$ であるから $0\leqq S_E\leqq S$ が $\mathcal{H}^+(\Omega')$ で成立する。ここで仮定より $S\in\mathcal{H}(\Omega)$ であるから定理6が使えて S_E は $\tilde{S}_E\in\mathcal{H}^+(\Omega)$ に接続できる。従って $\mathcal{B}\ni E\longrightarrow\tilde{S}_E\in\mathcal{H}^+(\Omega)$ なる写像が定まる。$|E|=0$ の時 $\tilde{S}_E=0$, $E_1\cap E_2=\phi$ の時 $\tilde{S}_{E_1\cup E_2}=\tilde{S}_{E_1}+\tilde{S}_{E_2}$。又、$E_1\supset E_2\supset\cdots\longrightarrow\phi$ ならば $S_{E_1}\geqq S_{E_2}\geqq\cdots\geqq 0$ だから $\tilde{S}_{E_1}\geqq\tilde{S}_{E_2}\geqq\cdots\geqq 0$。従って命題4によって $\tilde{S}_{E_j}(z,w)$ は $\Omega\times\Omega$ 上広義一様収束する。その極限は明らかに 0 であるから $\lim_{j\to\infty}\tilde{S}_{E_j}=0$ ($\mathcal{H}(\Omega)$ の位相で)。よって $E\to\tilde{S}_E$ なる対応は X 上定義された、順序 Fréchet 空間 $\mathcal{H}(\Omega)$ に値をとる σ-加法的、絶対連続集合関数である。今 Ω'' を Ω に相対コンパクトに含まれる任意の領域、$\{\varphi_j\}_{j=1,2,\ldots}$ を $L^2\mathcal{O}(\Omega'')$ の一つの完全正規直交系とする。さて、$\tilde{S}_E$ の Ω'' におけるトレース、

$$Tr_{\Omega''}(\widetilde{S}_E) = \int_{\Omega''} \widetilde{S}_E(z,z)\,dz\,d\bar{z}$$

はよく定義され，$E \to Tr_{\Omega''}(\widetilde{S}_E)$ なる対応は X 上の σ 加法的絶対連続正値集合関数となる。従ってラドン－ニコディムの定理によって，$\exists_1 f(\lambda) \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ s.t. $f(\lambda) \geqq 0$ $\forall \lambda \in X$，かつ，

$$Tr_{\Omega''}(\widetilde{S}_E) = \int_E f(\lambda)\,d\mu(\lambda) \qquad \forall E \in \mathcal{B}$$

となる。また，同様の議論により $\forall j,k = 1,2,\ldots$ に対し，$\exists f_{jk}(\lambda) \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ (複素数値). s.t.

$$\int_{\Omega'' \times \Omega''} \widetilde{S}_E(z,w)\overline{\varphi_j(z)}\varphi_k(w)\,|dz|^2 |dw|^2 = \int_E f_{jk}(\lambda)\,d\mu(\lambda)$$

$\forall E \in \mathcal{B}$。まず $\forall N = 1,2,\ldots$，$\forall (C_1, \cdots, C_N) \in \mathbb{C}^N$ に対して不等式，

$$0 \leqq \sum_{j,k=1}^N \bar{C}_j C_k f_{jk}(\lambda) \leqq \left(\sum_{j=1}^N |C_j|^2\right) f(\lambda) \quad \cdots\cdots ①$$

が，a.e. $\lambda \in X$ で成立する事をいう。実際 $\Phi(z) = \sum_{j=1}^N C_j \varphi_j(z) \in L^2\mathcal{O}(\Omega'')$ とおくと，$\forall E \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\int_E \left(\sum_{j,k=1}^N \bar{C}_j C_k f_{jk}(\lambda)\right) d\mu(\lambda) = \sum_{j,k=1}^N \bar{C}_j C_k \int_{\Omega'' \times \Omega''} \widetilde{S}_E(z,w)\overline{\varphi_j(z)}\varphi_k(w)\,|dz|^2 |dw|^2$$

$$= \int_{\Omega'' \times \Omega''} \widetilde{S}_E(z,w)\overline{\Phi(z)}\Phi(w)\,|dz|^2 |dw|^2 \geqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

であるから $\sum_{j,k=1}^N \bar{C}_j C_k f_{jk}(\lambda) \geqq 0$ a.e. λ。又，$\widetilde{S}_E(z,w) = \sum_{\ell=1}^\infty \lambda_\ell g_\ell(z)\overline{g_\ell(w)}$ なる，$L^2\mathcal{O}(\Omega'')$ での Hilbert-Schmidt 展開を使うと，

$$\lambda_\ell \geqq 0,\ \forall \ell, \quad (\lambda_\ell)_\ell \in \ell^1, \quad \sum_{\ell=1}^\infty \lambda_\ell = \int_{\Omega''} \widetilde{S}_E(z,z)\,|dz|^2 = Tr_{\Omega''}(\widetilde{S}_E),$$

であるので，$\int_{\Omega'' \times \Omega''} \widetilde{S}_E(z,w)\overline{\Phi(z)}\Phi(w)\,|dw|^2 |dz|^2 = \sum_{\ell=1}^\infty \lambda_\ell |(g_\ell, \Phi)_{\Omega''}|^2$
$\leqq \left(\sum_{\ell=1}^\infty \lambda_\ell\right) \cdot \|\Phi\|_{\Omega''}^2 = \left(\sum_{j=1}^N |C_j|^2\right) \cdot Tr_{\Omega''}(\widetilde{S}_E) = \int_E \left(\sum_{j=1}^N |C_j|^2\right) f(\lambda)\,d\mu(\lambda)$。

上と②を合わせると結局①が a.e. $\lambda \in X$ で成立。

$H = \{\lambda \in X ; \exists N \geqq 1,\ \exists (C_1, \ldots, C_N) \in (\mathbb{Q} + \sqrt{-1}\,\mathbb{Q})^N$, s.t. 不等式：

$0 \leqq \sum_{j,k=1}^{N} \overline{c_j} c_k f_{jk}(\lambda) \leqq (\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2) f(\lambda)$ が成立しない。}

とおくとHは零集合となるので（$\mathbb{Q}$は有理数体），Hの上で改めて$f_{jk}(\lambda)=0$とおく。従って結局$\forall \lambda \in X$，$\forall (c_j)_j \in \ell^2$，$\forall N \geqq 1$に対して不等式

$$0 \leqq \sum_{j,k=1}^{N} \overline{c_j} c_k f_{jk}(\lambda) \leqq (\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2) f(\lambda)$$

が成立する。特に$\overline{f_{jk}(\lambda)} = f_{kj}(\lambda)$ $\forall j, k, \forall \lambda$であって，$\forall (c_j)_j \in \ell^2$に対して$\lim_{N\to\infty} \sum_{j,k=1}^{N} \overline{c_j} c_k f_{jk}(\lambda)$が存在する。実際，

$$T_N : \ell^2 \ni (c_j)_j \longmapsto (\sum_{k=1}^{N} f_{1k}(\lambda) c_k, \ldots, \sum_{k=1}^{N} f_{Nk}(\lambda) c_k, 0, \ldots 0, \ldots) \in \ell^2$$

とおくと上の不等式より$\|T_N\| \leqq f(\lambda)$（Operator Norm）がわかるから，$\forall u = (c_j)_j \in \ell^2$，$\forall N \leqq M$に対して（$u_N = (c_1, \ldots, c_N, 0, 0, \ldots)$），

$$|(u, T_N u) - (u, T_M u)| = |(u_N, T_M u_N) - (u_M, T_M u_M)| \leqq 2 f(\lambda) \|u\| \cdot \|u_N - u_M\|$$

が成立する。これより明らか。今

$$\tilde{K}_N(\lambda; z, w) = \sum_{j,k=1}^{N} f_{jk}(\lambda) \varphi_j(z) \overline{\varphi_k(w)}$$

とおくと命題4(i)を用いる事により，$\forall \lambda \in X$に対して$\tilde{K}_N(\lambda; z, w)$は$(z, w) \in \Omega'' \times \Omega''$上広義一様収束して正型エルミート核$\tilde{K}(\lambda; z, w)$を定義する。しかも$\mathcal{H}(\Omega'')$での不等式

$$0 \leqq \tilde{K}(\lambda; *, *) \leqq f(\lambda) \cdot B_{\Omega''}$$

をみたすから，評価$|\tilde{K}(\lambda; z, w)| \leqq (\tilde{K}(\lambda; z, z) \cdot \tilde{K}(\lambda; w, w))^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{1}{2}(\tilde{K}(\lambda; z, z) + \tilde{K}(\lambda; w, w)) \leqq \frac{1}{2} f(\lambda)(B_{\Omega''}(z, z) + B_{\Omega''}(w, w))$を得る。従って$\tilde{K}$は$X \times \Omega'' \times \Omega''$上で定理の(ロ)の意味で可測かつ可積分となる。以後の議論はこれ迄の論法と同様なので省略する。

系11．定理10において X が R^m の開集合，$d\mu$ が R^m 上のルベッグ測度，$K(\lambda;z,w)$ が (λ,z,w) につき $X\times\Omega'\times\Omega'$ で C^∞（又は C^ω）の時を考える。その時拡張 $\tilde{K}(\lambda;z,w)$ も $X\times\Omega\times\Omega$ で C^∞（又は C^ω）特に $\tilde{K}(\lambda;z,w)=K(\lambda;z,w)$ が $X\times\Omega'\times\Omega'$ 全体で成立する事を主張する。

∵）$\tilde{K}(\lambda;z,w)$ は（D）の意味で可積分だから $X\times\Omega\times\Omega$ 上の distribution になる。しかも $(z,\bar{w})$ について正則であるから，C^∞性（又は C^ω性）の正則パラメータに関しての伝播定理により主張が得られる。

以上で整型エルミート核についての一般論はほぼ終わるが境界値問題などへ応用するにはさらに，$\mathcal{H}(\Omega)$ に働く線型作用素で順序を保つものを調べる必要がある，例えば $A_\alpha(z,w)\in\mathcal{H}^+(\Omega)$ とする時，

$$\mathcal{P}=\Sigma_{|\alpha|\leq N}A_\alpha(z,w)\partial_z^\alpha\partial_{\bar{w}}^\alpha$$

などは $\mathcal{H}(\Omega)$ に働く Positive Operator である。さらに擬微分作用素の範囲内で考えるならば，

$$\mathcal{P}=\left(\frac{Q(z,D_z)-\overline{Q(w,D_w)}}{i}\right)^{-1}=\int_0^\infty e^{itQ(z,D_z)}\cdot\overline{e^{itQ(w,D_w)}}\,dt$$

なども適当な管状錐領域（$\mathrm{Im}\,\sigma(Q)(z,\zeta)>0$ である様な）での整型エルミート核に働く Positive Operator として定義できるであろう。しかし応用上重要なのは次の様な，パラメータ付の（マイクロ）微分作用素と積分を含む場合である。

$$K(\lambda;z,w) \longmapsto \frac{1}{i}\int_0^1 (Q(\lambda;z,D_z)-\overline{Q(\lambda;w,D_w)})K(\lambda;z,w)d\lambda。$$

$\frac{1}{i}(Q(\lambda;z,D_z)-\overline{Q(\lambda;w,D_w)})$ は Positive Operator にはなりえないが上で見た様に逆作用素が Positive になる事があるなど非常に良い性質をもっている。実際掛算のみの時は以下の様な結果が成り立つ。

補題12　$K(z,w)\in\mathcal{H}(\Omega)$ が $\Omega\times\Omega$ で $(-\infty,0]$ の値をとらないとする。すなわち $K(\Omega,\Omega)\subset\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. その時 $\log K(z,w)$ も再び $\mathcal{H}(\Omega)$ の元になる。特に $\log|K(z,w)|\in L^2(\Omega\times\Omega)$ ならば

$$\exp(C_K\cdot B_\Omega(z,w))\cdot K(z,w)\in\mathcal{H}^+(\Omega),$$

但し $C_K=\pi+\|\log|K(z,w)|\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$。

∵) $\log K(z,w)+C_K B_\Omega(z,w)\in\mathcal{H}^+(\Omega)$ をいえば十分。命題3 (ii) より，$-\log K\leqq\|\log K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\cdot B_\Omega\leqq C_K\cdot B_\Omega$。

定理13　$\phi\neq\Omega'\subset\Omega$ を $\mathbb{C}^n$ の有界凸領域の対，$a(\lambda,z)$ を $[0,1]\times\overline{\Omega}$ 上での C^∞ 関数で z につき正則，かつ次を満たす。

(i)　$(0,1)\times\Omega$ 上で $\mathrm{Im}\,a(\lambda,z)>0$.

(ii)　$L=\{(\lambda,z)\in[0,1]\times\partial\Omega\,;\,\mathrm{Im}\,a(\lambda,z)=0\}$ 上では ∃連続ベクトル場 $\mathcal{X}=\sum_{j=1}^n(\alpha_j(\lambda,z)\partial/\partial z_j+\overline{\alpha}_j(\lambda,z)\partial/\partial\overline{z}_j)$ s.t. $\mathcal{X}a(\lambda,z)\neq0$, $\forall(\lambda,z)\in L$, かつ $\mathcal{X}$ は L の各点で内向き，すなわち $0<{}^\forall\varepsilon\ll1$, $(z_1+\varepsilon\alpha_1(\lambda,z),\cdots,z_n+\varepsilon\alpha_n(\lambda,z))\in\Omega$。

その時 $K(\lambda;z,w)$ が $\lambda\in(0,1)$ を C^∞-パラメータにもつ系11の意味での Ω' での半正定値整型エルミート核で

$$\int_0^1 \frac{1}{i}(a(\lambda,z)-\overline{a(\lambda,w)})K(\lambda,z,w)\,d\lambda$$

が $\Omega\times\Omega$ に解析接続できるならば、系11の意味で $K(\lambda;z,w)$ は $(0,1)\times\Omega\times\Omega$ に解析接続できる。

$\because$) $\frac{1}{i}(a(\lambda,z)-\overline{a(\lambda,w)})$ は $\Omega\times\Omega$ 上での整型エルミート核として補題の仮定をみたす(条件 iii) によって $\log|a(\lambda,z)-\overline{a(\lambda,w)}|\in L^2(\Omega\times\Omega)$ になる)。しかも $\sup_{0<\lambda<1}\|\log|a(\lambda,z)-\overline{a(\lambda,w)}|\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}<+\infty$ になるから、$\exists C>0$. s.t. $0<\forall\lambda<1$ に対して

$$\exp(CB_\Omega(z,w))\cdot\frac{1}{i}(a(\lambda,z)-\overline{a(\lambda,w)})\in\mathcal{H}^+(\Omega)$$

になる。従って、$e^{CB_\Omega}\cdot\frac{1}{i}(a(\lambda,z)-\overline{a(\lambda,w)})\cdot K(\lambda;*,*)$ について系11を適用すればよい。

最後にこれらの理論をマイクロ関数の理論に応用する為の基礎的部分を述べる。

定義14　$2n$ 変数 $(x,u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ についてのマイクロ関数 $k(x,u)$ が反対角集合 $\Delta^a=\{(x,u;i\xi dx+i\eta du)\in iS^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n);\ x=u,\ \xi+\eta=0\}$ 上の一点 $p_0=(x_0,x_0;i\xi_0(dx-du))$ $(|\xi_0|=1)$ においてエルミートであるとは $\overline{k(u,x)}=k(x,u)$ が p_0 の近傍で成立する事。これは $\exists K(z,w)\in\mathcal{H}(\{z=x+iy\in\mathbb{C}^n;\ |z-x_0|<\varepsilon,\ y\in\Gamma\})$ 但し $\Gamma=\{y\in\mathbb{R}^n;\ \langle y,\xi_0\rangle-\varepsilon\sqrt{|y|^2-\langle y,\xi_0\rangle^2}>0\}$ s.t.

$$k(x,u)=[\,K(x+i0\Gamma,\ \overline{u-i0\Gamma})\,]$$

が p_0 の近傍で成立する事と同値。($\because$ $k(x,u)=\frac{1}{2}(k(x,u)+\overline{k(u,x)})$)

さらにこの時 $k(x,u)$ が p_0 において半正定値であるとは $K(z,w)$

として$\mathcal{H}^+(\Omega)$の元がとれる時とする。$\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}$によって$\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|_{\Delta^a}$のエルミートな断面からなる$\Delta^a \cong iS^*\mathbb{R}^n$上の層を表わし、$\mathcal{H}^+_{\mathbb{R}^n}$によって半正定値なものからなる$\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}$の部分(層)とする(但し差については閉じない)。

実はこの$\mathcal{H}^+_{\mathbb{R}^n}$によって$\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}$に順序が入るのであるが、正則関数の場合とは違って$f, -f \in \mathcal{H}^+_{\mathbb{R}^n}$から$f=0$をいうのは容易ではない。しかし次の補題と正則関数の曲面波展開([2])を使えば比較的容易に証明できる。

<u>補題15</u>　Ωを$\mathbb{C}^{n-1}$の領域，$0<\rho_1<\rho_2$とする。$D_{\rho,\rho'}$を

$$\{(z,w)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n;\ |z_1|<\rho,\ |w_1|<\rho',\ (z',w')\in\Omega\times\Omega\}$$

と定義する。この時$K(z,w)\in\mathcal{H}^+(\{z\in\mathbb{C}^n;|z_1|<\rho_1,\ z'\in\Omega\})$に対して$\exists\, G_1(z,w)$, $\exists\, G_2(z,w)$：それぞれD_{ρ_1,ρ_2}, D_{ρ_2,ρ_1}で定義されたzにつき正則，wにつき反正則な関数，s.t.

$$K = G_1 + G_2$$

が$D_{\rho_1,\rho_1} = D_{\rho_1,\rho_2}\cap D_{\rho_2,\rho_1}$上で成立するならば$K(z,w)$は$D_{\sqrt{\rho_1\rho_2},\sqrt{\rho_1\rho_2}}$迄解析接続される。

∵)　G_1, G_2を$z_1, \overline{w}_1$について次の様に展開する。

$$G_1 = \sum_{j,k=0}^{\infty} g^1_{jk}(z',w')\, z_1^j\, \overline{w}_1^k, \qquad G_2 = \sum_{j,k=0}^{\infty} g^2_{jk}(z',w')\, z_1^j\, \overline{w}_1^k$$

よってD_{ρ_1,ρ_1}において$K(z,w) = \sum_{j,k=0}^{\infty}(g^1_{jk}(z',w')+g^2_{jk}(z',w'))\, z_1^j\, \overline{w}_1^k$となる。ここで$\forall U \Subset \Omega$と$\forall \varphi(z')\in L^2\mathcal{O}(U)$を固定する。

$\int_{U\times U} K(z,w)\overline{\varphi(z')}\varphi(w')|dz'|^2|dw'|^2$は$(z_1, w_1)$につき半正定値な整型

エルミート核だから，$(z_1, \overline{w_1})$ に関する巾級数展開の係数からなるエルミート行列

$$(\alpha_{jk})_{jk} = \left(\int_{U\times U} \left(g^1_{jk}(z',w') + g^2_{jk}(z',w') \right) \overline{\varphi(z')}\varphi(w')\,|dz'|^2|dw'|^2 \right)_{j,k=1,2,\dots}$$

は半正定値である．特に Cauchy-Schwarz 型の不等式；

$$|\alpha_{jk}|^2 \leqq \alpha_{jj}\cdot\alpha_{kk}$$

が成立する。 $h_{jk}(z',w') = g^1_{jk}(z',w') + g^2_{jk}(z',w')$ とおくとこれは

$$\left| \int_{U\times U} h_{jk}(z',w')\overline{\varphi(z')}\varphi(w')\,|dz'|^2|dw'|^2 \right|^2$$

$$\leqq \left(\int_{U\times U} h_{jj}(z',w')\overline{\varphi(z')}\varphi(w')\,|dz'|^2|dw'|^2 \right)\cdot\left(\int_{U\times U} h_{kk}(z',w')\overline{\varphi(z')}\varphi(w')\,|dz'|^2|dw'|^2 \right).$$

ところが G_1, G_2 はそれぞれ $D_{\rho_1,\rho_2}, D_{\rho_2,\rho_1}$ で正則だから $0<{}^\forall\varepsilon\ll 1$,
$\exists C_\varepsilon>0$, s.t. （コーシーの評価式）

$$\left| \int_{U\times U} g^1_{jk}(z',w')\overline{\varphi(z')}\varphi(w')\,|dz'|^2|dw'|^2 \right| \leqq C_\varepsilon(\rho_1-\varepsilon)^{-j}(\rho_2-\varepsilon)^{-k}$$

$$\left| \int_{U\times U} g^2_{jk}(z',w')\overline{\varphi(z')}\varphi(w')\,|dz'|^2|dw'|^2 \right| \leqq C_\varepsilon(\rho_2-\varepsilon)^{-j}(\rho_1-\varepsilon)^{-k}$$

が成立する．特に，

$$\left| \int_{U\times U} h_{\ell\ell}(z',w')\overline{\varphi(z')}\varphi(w')\,|dz'|^2|dw'|^2 \right| \leqq 2C_\varepsilon\{(\rho_1-\varepsilon)(\rho_2-\varepsilon)\}^{-\ell}.$$

従って上のコーシーシュバルツの不等式に代入すれば，

$$\left| \int_{U\times U} h_{jk}(z',w')\overline{\varphi(z')}\varphi(w')\,|dz'|^2|dw'|^2 \right| \leqq 2C_\varepsilon\left((\rho_1-\varepsilon)(\rho_2-\varepsilon)\right)^{-\frac{j+k}{2}}$$

を得る．これから $\int_{U\times U} K(z,w)\overline{\varphi(z')}\varphi(w')\,|dz'|^2|dw'|^2$ が $\{|z_1|<\sqrt{\rho_1\rho_2}$, $|w_1|<\sqrt{\rho_1\rho_2}\}$ 迄接続できる事がわかる。$U\Subset\Omega$, $\varphi\in L^2\mathcal{O}(U)$ は任意だから結局，命題4,(i) などにより $K(z,w)$ が $D_{\sqrt{\rho_1\rho_2},\sqrt{\rho_1\rho_2}}$ 迄接続できる事がわかる．

ここで[2]の中の、正則関数の曲面波展開に関する定理(Th. 1.1.8)を思い出す。

定理16. $\alpha>0$, $z\in\mathbb{C}^n$, $\xi\in S^{n-1}=\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ \xi_1^2+\cdots+\xi_n^2=1\}$ に対して

$$K_\alpha(z,\xi)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\cdot\frac{(1-i\alpha\langle z,\xi\rangle)^{n-2}\{1-i\alpha\langle z,\xi\rangle-\alpha^2(\sum_{j=1}^n z_j^2-\langle z,\xi\rangle^2)\}}{\{\langle z,\xi\rangle+i\alpha(\sum_{j=1}^n z_j^2-\langle z,\xi\rangle^2)\}^n}$$

とおく。($n=1$ の時は Cauchy 核 $\frac{1}{-2\pi i}\cdot\frac{1}{z}$)。$0<R_1<R$, $0<\alpha<1/2(R+R_1)$, $\beta>0$ とする。V は $\mathbb{R}^n$ 内の連結開錐，y_0 は V のベクトルで $0<|y_0|\leqq\beta'=\min\{\beta,\frac{1}{2}\alpha(R-R_1)^2\}$ とする。この時 $D=\{z\in\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Re}\,z|\leqq R,\ \mathrm{Im}\,z\in V,\ |\mathrm{Im}\,z|\leqq\beta\}$ で正則な $F(z)$ に対し、

(イ) $\mathcal{R}_{\alpha,y_0}F(z,\xi)=\int_{\{|\mathrm{Re}\,z'|\leqq R,\ \mathrm{Im}\,z'=y_0\}}K_\alpha(z-z',\xi)F(z')dz'$

は適当な積分チェインの変更により $\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n;\ |\xi|=1,\ \mathrm{Im}\,z\in V,\ |\mathrm{Re}\,z|<R_1,\ |\mathrm{Im}\,z|<\beta'\}$ で正則になり，かつ $\{\mathrm{Im}\,z\in V,\ |\mathrm{Re}\,z|<R_1,\ |\mathrm{Im}\,z|<\beta'\}$ 上で

$$F(z)=\int_{|\xi|=1}\mathcal{R}_{\alpha,y_0}F(z,\xi)d\sigma(\xi)$$

が成立する。但し $d\sigma(\xi)$ は S^{n-1} 上の体積要素。

(ロ) 実は各 $\xi\in S^{n-1}$ に対して $\mathcal{R}_{\alpha,y_0}F(z,\xi)$ はさらに広い領域

$$\bigcup_{y\in V\cap B(0,\beta')}\{z\in\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Re}\,z|<R_1,\ |\mathrm{Im}\,z|<\tfrac{1}{2}\alpha(R-R_1)^2,\ g(\mathrm{Im}\,z-y,\xi)>0\}$$

で正則。但し $B(0,\beta')=\{y\in\mathbb{R}^n;\ |y|\leqq\beta'\}$，又 $\forall(y,\xi)\in\mathbb{R}^n\times S^{n-1}$ に対し，

$$g(y,\xi)=\langle y,\xi\rangle-\alpha(1+4\alpha^2(R+R_1)^2)(|y|^2-\langle y,\xi\rangle^2)。$$

$n=1$ の時は補題15のみでもコホモロジカルな議論は済むのであるが，$n\geqq2$ では上の定理が不可欠である。

定義17　今 $\alpha, R_1, R, \beta, \beta', g, V$ などを前定理と同じ様にとる。$\Omega_0 = \{ z \in \mathbb{C}^n ;\ |\mathrm{Re}\, z| \leqq R,\ \mathrm{Im}\, z \in V \cdot |\mathrm{Im}\, z| \leqq \beta \}$, $D = \{ (z, \xi) \in \mathbb{C}^n \times S^{n-1} ;$ $|\mathrm{Re}\, z| < R_1,\ |\mathrm{Im}\, z| < \frac{1}{2}\alpha (R - R_1)^2$, かつ $\exists\, y \in V \cap B(0, \beta')$ s.t. $g(\mathrm{Im}\, z - y, \xi) > 0 \}$ とおく。その時 $y_0 \in V$ が前定理にある条件を満せば,

$$T_{y_0} : \mathcal{H}(\Omega_0) \ni h(z, w) \longmapsto T_{y_0} h(z, w ; \xi, \eta) \in \mathcal{H}(D)$$

なる，順序を保つ線型写像

$$T_{y_0} h(z, w ; \xi, \eta) = \int_{\substack{\{ |\mathrm{Re}\, z'| \leqq R,\ |\mathrm{Re}\, w'| \leqq R \\ \mathrm{Im}\, z' = \mathrm{Im}\, w' = y_0 \}}} K_\alpha (z - z' ; \xi) \overline{K_\alpha (w - w' ; \eta)}\, h(z', w')\, dz'\, d\overline{w'}$$

が定義できる。但し ξ, η については実解析的に考える。上の定理により,

$$h(z, w) = \int_{S^{n-1} \times S^{n-1}} T_{y_0} h(z, w ; \xi, \eta)\, d\sigma(\xi)\, d\sigma(\eta)$$

が成立する。

定理18　Ω_0, D は上の通りとする。Ω_0での半正定値整型エルミート核 $h(z, w)$ に対し，$(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, $|x_0| < R_1$ とすると,

$$SS(h(x + i0V, \overline{u - i0V})) \not\ni (x_0, x_0 ; i\xi_0 dx - i\xi_0 du)$$

$\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し整型エルミート核

$$\int_{|\xi - \xi_0| < \varepsilon,\ |\eta - \xi_0| < \varepsilon} T_{y_0} h(z, w ; \xi, \eta)\, d\sigma(\xi)\, d\sigma(\eta)$$ は $(z, \overline{w}) = (x_0, x_0)$ 迄解析接続できる。

(注)　証明を詳しく見ればわかる様に,上はさらに $T_{y_0} h(z, w ; \xi, \eta)$ が $z = w = x_0,\ \xi = \eta = \xi_0$ の近傍迄解析接続できる事と同値。

ⅱ) $\Leftarrow$ $h(z,w)=\int_{S^{n-1}\times S^{n-1}\setminus\{|\xi-\xi_0|\le\varepsilon,\ |\eta-\xi_0|\le\varepsilon\}} T_{y_0}h(z,w;\xi,\eta)\,d\sigma(\xi)\,d\sigma(\eta)$

$\qquad+\int_{\{|\xi-\xi_0|\le\varepsilon,\ |\eta-\xi_0|\le\varepsilon\}} T_{y_0}h(z,w;\xi,\eta)\,d\sigma(\xi)\,d\sigma(\eta)$

であり，才一項の境界値は T_{y_0} の定義から明らかに $i\xi_0\cdot(dx-du)$ 方向でマイクロ解析的。一方才二項は仮定から (x_0,x_0) で解析的であるから $h(x+i0V,\ \overline{u-i0V})$ は $(x_0,x_0;i\xi_0\cdot(dx-du))$ でマイクロ解析的。$\Rightarrow$をいう。　まず座標の回転により $\xi_0=(1,0\cdots,0)$ とできる。$SS(h(x+i0V,\ \overline{u-i0V}))\not\ni(x_0,x_0;i\xi_0(dx-du))$ より $\exists r>0$ $(|x_0|+r<R_1)$ $0<{}^\exists\delta\ll1$, ${}^\exists(s^1,t^1),\ldots,{}^\exists(s^l,t^l)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus(0,0)$, ${}^\exists F_1(z,w),\ldots,{}^\exists F_l(z,w)$

s.t.

(i) $\langle s^j,\xi_0\rangle+\langle t^j,\xi_0\rangle=s^j_1+t^j_1<0$，但し $s^j=(s^j_1,\ldots,s^j_n)$, $t^j=(t^j_1,\ldots,t^j_n)$

(ii) $F_j(z,w)$ は $\{(z,w)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Re}\,z-x_0|\le r,\ |\mathrm{Re}\,w-x_0|\le r,\ |\mathrm{Im}\,z|\le\delta,$ $|\mathrm{Im}\,w|\le\delta,\ (\mathrm{Im}\,z,\mathrm{Im}\,w)=\theta_1(s^j,t^j)+\theta_2(y_0,y_0)$ ここで ${}^\exists\theta_1,\theta_2\ge0$ s.t $\theta_1+\theta_2>0\}$ で定義され z につき正則，w につき反正則．

(iii) $h(z,w)=\sum_{j=1}^{l}F_j(z,w)$ が $\{|\mathrm{Re}\,z-x_0|\le r,\ |\mathrm{Re}\,w-x_0|\le r,\ |\mathrm{Im}\,z|\le\delta,$ $|\mathrm{Im}\,w|\le\delta,\ (\mathrm{Im}\,z,\mathrm{Im}\,w)=\theta(y_0,y_0),\ {}^\exists\theta>0\}$ 上で成立する．

$\beta''=\min\{\beta',\ \frac{1}{2}\alpha(\frac{r}{2})^2,\ \delta\}>0$ とおくと定理16の中で $\alpha, R, R_1,$ β' をそれぞれ $\alpha, r, \frac{1}{2}r, \beta''$ におきかえたものに対し，定理の条件がみたされる。今 $\psi(x)$ を $\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x|\le R\}$ 上の C^∞-関数で $0<\psi(x)\le1$, $\psi|_{\{|x|=R\}}\equiv1$, $\psi|_{\{|x-x_0|\le r\}}\equiv\frac{\beta''}{\beta'}$ をみたすものとする。これを使って $T_{y_0}h(z,w;\xi,\eta)$ の積分チェインを変更する。

$$T_{y_0}h = \int_{\{\tilde z=\tilde x+i\psi(\tilde x)y_0,\ \tilde w=\tilde u+\psi(\tilde u)y_0;\ |\tilde u|\le R,\ |\tilde x|\le R\}} K_\alpha(z-\tilde z,\xi)\overline{K_\alpha(w-\tilde w,\eta)}\,h(\tilde z,\tilde w)\,d\tilde z\,\overline{d\tilde w}$$

$$=\int_{\{\tilde z=\tilde x+i\psi(\tilde x)y_0,\ \tilde w=\tilde u+i\psi(\tilde u)y_0;\ |\tilde x|\le R,\ |\tilde u|\le R,\ |\tilde x-x_0|\ge r\}} K_\alpha(z-\tilde z,\xi)\overline{K_\alpha(w-\tilde w,\eta)}\,h(\tilde z,\tilde w)\,d\tilde z\,\overline{d\tilde w}$$

$$+\int_{\{\tilde z=\tilde x+i\psi(\tilde x)y_0,\ \tilde w=\tilde u+i\psi(\tilde u)y_0;\ |\tilde x|\le R,\ |\tilde u|\le R,\ |\tilde u-x_0|\ge r\}} K_\alpha(z-\tilde z,\xi)\overline{K_\alpha(w-\tilde w,\eta)}\,h(\tilde z,\tilde w)\,d\tilde z\,\overline{d\tilde w}$$

$$+\int_{\{\mathrm{Im}\,\tilde z=\mathrm{Im}\,\tilde w=\beta''y_0/\beta';\ |\mathrm{Re}\,\tilde z-x_0|\le r,\ |\mathrm{Re}\,\tilde w-x_0|\le r\}} K_\alpha(z-\tilde z,\xi)\overline{K_\alpha(w-\tilde w,\eta)}\,h(\tilde z,\tilde w)\,d\tilde z\,\overline{d\tilde w}$$

才1項，2項，3項をそれぞれ H_1，H_2，H_3 とおく。才3項は (iii) によってさらに．

$$H_3 = \sum_{j=1}^{l}\int_{\{\mathrm{Im}\,\tilde z=\mathrm{Im}\,\tilde w=\beta''y_0/\beta';\ |\mathrm{Re}\,\tilde z-x_0|\le r,\ |\mathrm{Re}\,\tilde w-x_0|\le r\}} K_\alpha(z-\tilde z,\xi)\overline{K_\alpha(w-\tilde w,\eta)}\,F_j(\tilde z,\tilde w)\,d\tilde z\,\overline{d\tilde w}$$

と書ける．以下．この才 j 項を H_3^j $1\le j\le l$ と書く事にする。

β'' を上の様にとった事により（積分路変更によって）$\exists\delta'>0$，$\exists M>0$ に対して H_1，H_2 はそれぞれ．

$$\{(z,w;\xi,\eta)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\times S^{n-1}\times S^{n-1};\ |z-x_0|\le\delta',\ |w-x_0|\le\delta',$$
$$\langle \mathrm{Im}\,w,\eta\rangle - M(|\mathrm{Im}\,w|^2-\langle\mathrm{Im}\,w,\eta\rangle^2)>0\} \qquad \text{---} ①$$

$$\{(z,w;\xi,\eta);\ |z-x_0|\le\delta',\ |w-x_0|\le\delta',$$
$$\langle \mathrm{Im}\,z,\xi\rangle - M(|\mathrm{Im}\,z|^2-\langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle^2)>0\} \qquad \text{----} ②$$

で解析的となる。一方 H_3^j は F_j の性質 (ii) によって積分チェインを変更でき．次の領域まで接続できる。すなわち上でとっ

た十分大なMと十分小なδ'に対し，

$$\bigcup_{0<\theta<\delta'}\{(z,w;\xi,\eta);\ |z-x_0|\leqq\delta',\ |w-x_0|\leqq\delta',$$
$$\langle \mathrm{Im}\,z-\theta\cdot s^j,\xi\rangle-M(|\mathrm{Im}\,z-\theta\cdot s^j|^2-\langle \mathrm{Im}\,z-\theta\cdot s^j,\xi\rangle^2)>0,$$
$$\langle \mathrm{Im}\,w-\theta\cdot t^j,\eta\rangle-M(|\mathrm{Im}\,w-\theta\cdot t^j|^2-\langle \mathrm{Im}\,w-\theta\cdot t^j,\eta\rangle^2)>0\}$$

で解析的となる。ここで和$\Sigma_{j=1}^{l}$を3つの部分に分ける。すなわち$\forall j;\ s_1^j+t_1^j<0$であるから，

$$H_3=\Sigma_{j=1}^{l}H_3^j=G_0+G_1+G_2=\Sigma_{\{j;\ s_1^j<0,\ t_1^j<0\}}H_3^j$$
$$+\Sigma_{\{j;\ s_1^j<0,\ t_1^j\geqq0\}}H_3^j+\Sigma_{\{j;\ s_1^j\geqq0,\ t_1^j<0\}}H_3^j\ 。$$

そうすると上の評価により$G_0(z,w;\xi,\eta)$は$z=w=x_0$，$\xi=\eta=(1,0\ldots,0)$で解析的となる．さらに$\forall j;\ s_1^j+t_1^j<0$だから，$\exists A>1$と十分小さな正数$\theta_0\ (\ll 1)$に対して$G_1$，$G_2$はそれぞれ

$$\bigcup_{0<\theta<\theta_0}\{(z,w;\xi,\eta);\ |z-x_0|\leqq\delta',\ |w-x_0|\leqq\delta',\ |\xi-\xi_0|\leqq\varepsilon(\theta),\ |\eta-\xi_0|\leqq\varepsilon(\theta),$$
$$|\mathrm{Im}\,z'|\leqq\theta_0\cdot\theta,\ |\mathrm{Im}\,w'|\leqq\theta_0\cdot\theta,\ \mathrm{Im}\,z_1\geqq-A\theta,\ \mathrm{Im}\,w_1\geqq\theta\}\ \text{---}\ ③$$

$$\bigcup_{0<\theta<\theta_0}\{(z,w;\xi,\eta);\ |z-x_0|\leqq\delta',\ |w-x_0|\leqq\delta',\ |\xi-\xi_0|\leqq\varepsilon(\theta),\ |\eta-\xi_0|\leqq\varepsilon(\theta),$$
$$|\mathrm{Im}\,z'|\leqq\theta_0\cdot\theta,\ |\mathrm{Im}\,w'|\leqq\theta_0\cdot\theta,\ \mathrm{Im}\,z_1\geqq\theta,\ \mathrm{Im}\,w_1\geqq-A\theta\}\ \text{---}\ ④$$

で解析的となる。但し$\varepsilon(\theta)$はθによる小さな正数。①,②によりθ_0を小さくとればH_1，H_2もそれぞれ③，④の領域で解析的となる。従って$I_1=H_1+G_0+G_1$，$I_2=H_2+G_2$とおくと十分小さい$0<\theta\ (<\frac{A-1}{(A+1)^2}\delta')$に対して

$$J_1=\int_{\{|\xi-\xi_0|\leqq\varepsilon(\theta),\ |\eta-\xi_0|\leqq\varepsilon(\theta)\}}I_1(z,w;\xi,\eta)\,d\sigma(\xi)\,d\sigma(\eta),$$

$$J_2 = \int_{\{|\zeta-\zeta_0|\leqq\varepsilon(\theta),\ |\eta-\zeta_0|\leqq\varepsilon(\theta)\}} I_2(z,w;\zeta,\eta)\,d\sigma(\zeta)\,d\sigma(\eta)$$

はそれぞれ，

$$D_1 = \{(z,w)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n;\ |z'-x_0'|<\theta_0\cdot\theta,\ |w'-x_0'|<\theta_0\cdot\theta,$$

$$|z_1-x_{0,1}-i\tfrac{A+1}{A-1}\theta|<(\tfrac{A+1}{A-1}+A)\theta,\ |w_1-x_{0,1}-i\tfrac{A+1}{A-1}\theta|<\tfrac{2\theta}{A-1}\},$$

$$D_2 = \{(z,w);\ |z'-x_0'|<\theta_0\cdot\theta,\ |w'-x_0'|<\theta_0\cdot\theta,$$

$$|z_1-x_{0,1}-i\tfrac{A+1}{A-1}\theta|<\tfrac{2}{A-1}\theta,\ |w_1-x_{0,1}-i\tfrac{A+1}{A-1}\theta|<(\tfrac{A+1}{A-1}+A)\theta\}$$

で解析的となり，$D_1\cap D_2$ 上で

$$J_1(z,w)+J_2(z,w)=\int_{\{|\zeta-\zeta_0|\leqq\varepsilon(\theta),\ |\eta-\zeta_0|\leqq\varepsilon(\theta)\}} T_{y_0}h(z,w;\zeta,\eta)\,d\sigma(\zeta)\,d\sigma(\eta)$$

をみたす。右辺は半正定値整型エルミート核だから，補題15が使えて，右辺は $\{|z'-x_0'|<\theta_0\cdot\theta,\ |w'-x_0'|<\theta_0\cdot\theta,$

$|z_1-x_{0,1}-i\frac{A+1}{A-1}\theta|<\frac{\sqrt{2(A^2+1)}}{A-1}\theta,\ |w_1-x_{0,1}-i\frac{A+1}{A-1}\theta|<\frac{\sqrt{2(A^2+1)}}{A-1}\theta\}$ で解析的となる。$\frac{\sqrt{2(A^2+1)}}{A-1}\theta>\frac{A+1}{A-1}\theta$ であるから，特に $(z,w)=(x_0,x_0)$ の近傍で解析的となる。

<u>定理19</u>　$p_0=(x_0,x_0;i\xi_0(dx-du))$ とする。$\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}$ の p_0 での芽 $f(x,u)$ に対し，$f\in\mathcal{H}^+_{\mathbb{R}^n}|_{p_0}$ かつ $-f\in\mathcal{H}^+_{\mathbb{R}^n}|_{p_0}$ ならば $f=0$。従って $f,g\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}|_{p_0}$ に対して $f\geqq g$ を $f-g\in\mathcal{H}^+_{\mathbb{R}^n}|_{p_0}$ で定義すれば $\{\geqq\}$ は順序となる。

∵ f, $-f$ をある一つの管状角領域 Ω における半正定値整型エルミート核の境界値によりそれぞれ表わしておけば定理18と定理6により直ちに従う。（正核の和が接続できれば各項が接続できるから。）

この様に定理18を使えばコホモロジカルな問題を単なる解析接続の問題に還元する事ができる。その為前半で得たいくつかの結果をマイクロ関数の場合に定式化し，証明する事ができる。しかし境界値問題への応用など詳しくは別の機会に譲る事にする。

文献

[1] Bergman, S., The Kernel Function and Conformal Mapping, Mathematical surveys Number V. Amer. Mat. Soc., New York 1950.

[2] Kataoka, K., On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, To appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

[3] Sjöstrand, J., Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems. II. Comm. Par. Dif. Equ., 5(2), 187~207 (1980).

文献についての注

半正定値整型エルミート核についての結果についてはあまりよく検索していませんので見落しがあるかと思います。あらかじめお断りしておきます。